Gebrochen-rationale Funktionen mit Parameter III
Übung

Gegeben sind die gebrochen – rationalen Funktionen $f_c\colon x \mapsto f_c(x)$ mit

$$f_c(x) = \frac{x^3-2cx^2+c^2x}{(x-2)(x-2c)};\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}.$$

Die Graphen der Funktionen f_c werden mit G_{f_c} bezeichnet.

a) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von c die maximale Definitionsmenge der Funktionen f_c und geben Sie die Art aller Definitionslücken an. Berechnen Sie ferner alle Nullstellen von f_c. (6 BE)

Ab hier wird $c = 2$ gesetzt.

b) Bestimmen Sie für $c = 2$ die stetige Fortsetzung $\tilde{f}_2$ von f_2 sowie Art und Gleichung aller vorhandenen Asymptoten dieser Funktion. (7 BE)

c) Zeichnen Sie die Asymptoten von f_2 im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ in ein Koordinatensystem ein. Tragen Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen G_{f_2} unter Berechnung geeigneter Funktionswerte mit ein. (5 BE)

Gebrochen – rationale Funktionen mit Parameter III
Lösung

a) Wegen $c \neq 1$ ist $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{2; 2c\}$
$x^3 - 2cx^2 + c^2x = x(x^2 - 2cx + c^2) = x(x-c)^2$

1. Fall: $c = 2$
Hebbare Definitionslücke bei $x = 2$
und Polstelle 1. Ordnung (mit Vorzeichenwechsel) bei $x = 4$.
$x_1 = 0$ ist eine (einfache) Nullstelle, $x_2 = 2$ in diesem Fall nicht.

2. Fall: $c \neq 2$
Polstelle 1. Ordnung (mit Vorzeichenwechsel) bei $x = 2$
und Polstelle 1. Ordnung (mit Vorzeichenwechsel) bei $x = 4$.
$x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ sind (jeweils einfache) Nullstellen von $f_c(x)$.

b) $f_2(x) = \frac{x^3-4x^2+4x}{(x-2)(x-4)} = \frac{x(x-2)^2}{(x-2)(x-4)}$; $\tilde{f}_2(x) = \frac{x(x-2)}{(x-4)}$
Eine senkrechte Asymptote liegt vor an der Polstelle, also mit der Gleichung $x = 4$.
$(x^2 - 2x) : (x - 4) = x + 2 + \frac{8}{x+2}$,
die Gleichung der schrägen Asymptote lautet daher $y = x + 2$.

c) $f_2(-4) = -3$; $f_2(3) = -3$;
bei $x_1 = 0$ befindet sich eine Nullstelle und bei $x_2 = 2$ eine hebbare Definitionslücke.